

الفضاء المترى المقطع :

تأخذ مجموعة  $X$  غير خالية ونعرف دالة المسافة

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & ; x \neq y \\ 0 & ; x = y \end{cases}$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

$$1 \leq 1 + 1$$

$$0 \leq 0 + 0$$

$$x = y \neq z \quad 0 \leq 1 + 1$$

ليكن  $G$  مجموعة الدوال الحقيقية، المعرفة على المجال  $[a, b]$  نعرف المسافة بالصيغة التالية :

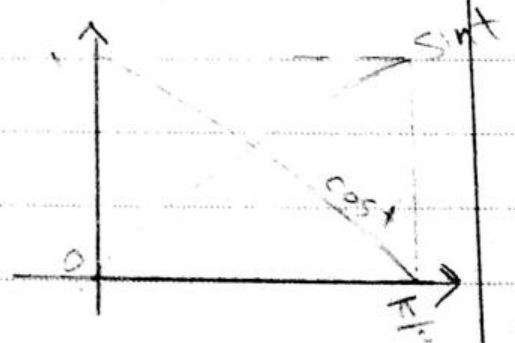
$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

أكبر الفروق بين  $x$  و  $y$ ، لذلك على المجال المعطى

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x = \sin t$$

$$y = \cos t$$

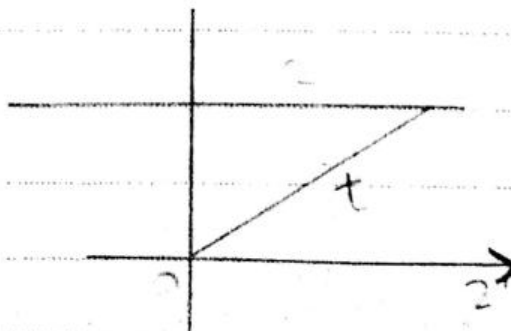


$$d(x, y) = \text{أكبر الفروق}$$

$$y = 2, \quad x = t$$

مثال 2 :

$$\text{أكبر الفروق} = 2$$



الكروية المفتوحة والغلقة :

تعريف: ليكن  $d$  فضاء مقياسي.

$a \in X$  ,  $r > 0$  عدد حقيقي موجب.

- إن مجموعة نقاط الفضاء التي تبعد عن النقطة  $a$  مسافة أقل من  $r$  تسمى كرة مفتوحة مركزها  $a$  ونصف قطرها  $r$ .

وترمز لها بـ  $B(a, r)$

أي :  $B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$  الكرة المفتوحة.

- أما مجموعة نقاط الفضاء التي تبعد عن النقطة  $a$  بمقدار  $r$  أو أكثر تسمى كرة غلقة مركزها  $a$  ونصف قطرها  $r$  وترمز لها بالرمز

$$\bar{B}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$$

أما مجموعة نقاط الفضاء التي تبعد عن  $a$  بمقدار يساوي  $r$  تسمى كرة نصف قطر  $r$  وترمز لها بالرمز  $S(a, r)$  فمركزه  $a$  ونصف قطرها  $r$ .

$$S(a, r) = \{x \in X : d(x, a) = r\}$$

- مثال :

فضاء الفضاء الثلاثي  $\mathbb{R}^3$ .

$$a = (a_1, a_2, a_3)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

في حالة الكرة المفتوحة :

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

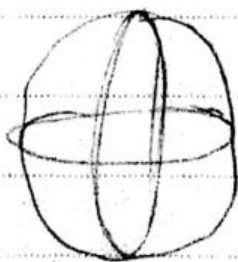
$$= \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2 + |x_3 - a_3|^2 < r^2\}$$

أي أن مجموعة نقاط الفضاء التي تحقق المتراجحة (بتنسيق الطرفين)

$$r^2 > |x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2 + |x_3 - a_3|^2$$

تسمى الكرة غلقة

السطح الكروي وحاد اقله



مثال: المستوى  $R^2$

$$a = (a_1, a_2)$$

$$x = (x_1, x_2)$$

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

$$= \{x \in R^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\}$$

بتعبير آخر، المعطيين  $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$

مجموعة النقاط (مجموعة النقاط) داخل الكرة أي محيطة بالكرة (مجموعة)

الكرة المغلقة عن المثال السابق  $r^2$  يكون الفرق بين الكرة المفتوحة والكرة المغلقة

الكرة مفتوحة

إذاً سطح الكرة هو عبارة عن الدائرة المحيطة.

-  $R$

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

$$= \{x \in R : |x - a| < r\}$$

$$-r < x - a < r$$

$$a - r < x < a + r$$

$$]a - r, a + r[$$

الكرة المفتوحة عن  $R$  هي مجال مفتوح

الكرة المغلقة تكون مجال مغلق  $[a - r, a + r]$

إذاً سطح الكرة - القطبين  $a - r, a + r$

$$S(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\} = \{a - r, a + r\}$$

مثال:

ناتج الفضاء المتري المتقطع  $X, d$

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

نفرض  $r < 1$

$$(r \leq \frac{3}{4})$$

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\} \cup \{a\}$$

إذا النقطة الوحيدة التي تبعد عن  $a$  بقدر  $\frac{3}{4}$  أقل من  $\frac{3}{4}$  بين أي نقطة أخرى تبعد عن  $a$  بقدر  $\frac{3}{4}$  أو أكثر.  
سطح الكرة:

$$S(a, r) = \{x \in X : d(x, a) = r\} = \emptyset$$

- عندما  $r \leq 1$

مجموعة نقاط الفضاء التي تبعد عن  $a$  بقدر  $r$  أقل من  $r$  هي  $B(a, r) \cup \{a\}$  الكرة الصغيرة  
حالة لا يوجد إلا النقطة  $a$

$\bar{B}(a, r) \subseteq X$  الكرة المغلقة  
كل نقاط الفضاء أصغر من  $r$  أي  $[1]$

- سطح الكروي

$$S(a, r) = X \setminus \{a\}$$

كل النقاط باستثناء  $a$

تعريف:

ليكن  $d$  فضاء مترى  $X$   $a \in X$  نقطة من الفضاء

$U \subseteq X$  مجموعة جزئية من الفضاء

نسب المجموعة  $U$  هو "النقطة  $a$  إذا وجد كره مفتوحة  $B(a, r)$

$$B(a, r) \subseteq U$$

هو "النقطة: هو أي مجموعة كروي كره مفتوحة حاصرها هذه النقطة

أي كره مفتوحة مركزها  $a$  هو "النقطة  $a$

$$B(a, r) \subseteq B(a, r)$$

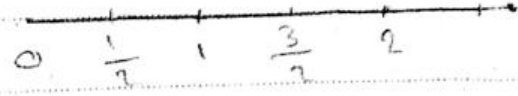
هذا هو الصغ أن حاكوي الجوار هو الجوار

إذا كان  $U$  هو  $a$ ،  $U$  يحوي  $U$  عندها يكون

$$B(a, r) \subseteq U \subseteq X$$

مثال : الفضاء  $R$  :

نأخذ المجموعة :  $[0, 2]$  هو لها العدد  $\frac{1}{2}$  لأنه يحوي كرة مفتوحة  
مركزها  $\frac{1}{2}$



$$[0, 2] \subseteq [0, 2]$$

$$[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \subseteq [0, 2]$$

هل الجواب  $[0, 2]$  هو هو، للنقطة  $x = 2$  ؟

لا : لأنه لا يحوي مجال مفتوح (كرة مفتوحة) مركزها  $2$

هل المجموعة  $A = \{1, 2, 3\}$  هو "لا" ؟

لا تحوي مجال مفتوح مركزها العدد  $\frac{1}{2}$  ونفس الكلام عن  $2$  و  $3$   
نصريف :

ليكن  $x, d$  عضو حدي و  $A$  مجموعة جزئية مما  $x$   $A \subseteq X$   
 $a \in A$  نقطة مما  $A$

نسبى النقطة  $a$  نقطة داخلية للمجموعة  $A$  إذا وجدت كرة مفتوحة  
 $B(a, r)$  بحيث تكون هذه الكرة موجودة مما  $A$

$$B(a, r) \subseteq A$$

تكون النقطة  $a$  داخلية مما المجموعة  $A$  إذا كانت  $A$  هو  $a$ .  
نصريف :

إن مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة  $A$  تسمى داخلية  $A$  ونرمز لها  
بـ  $A^\circ$  :  $A \subseteq A^\circ$

نصريف :

تسمى المجموعة الجزئية  $A$  من الفضاء المترى  $d, X$  مجموعة مفتوحة إذا  
كانت جميع نقاطها داخلية

أي : تكون المجموعة  $A$  مفتوحة إذا وفقط إذا كانت  $A = A^\circ$   
وبالتالي ذلك قولنا :

تكون المجموعة  $A$  مفتوحة إذا وفقط إذا كانت هو "النقطة"  
من نقاطها  
الذهبت إلى الجزء الثانية ..  
- 5 -